专题三　函数的概念与基本初等函数

3.1　函数及其性质

## 考点一　函数的概念及表示

**1.(2015湖北文,7,5分)设x∈R,定义符号函数sgn x=则(　　)**

A.|x|=x|sgn x|　　　　　B.|x|=xsgn|x|

C.|x|=|x|sgn x　　　　　D.|x|=xsgn x

**2.(2014江西理,3,5分)已知函数f(x)=5|x|,g(x)=ax2-x(a∈R).若f[g(1)]=1,则a=(　　)**

A.1　　　B.2　　　C.3　　　D.-1

**3.(2017山东理,1,5分)设函数y=的定义域为A,函数y=ln(1-x)的定义域为B,则A∩B=(　　)**

A.(1,2)　　　　　B.(1,2]

C.(-2,1)　　　　　D.[-2,1)

**4.(2015重庆文,3,5分)函数f(x)=log2(x2+2x-3)的定义域是(　　)**

A.[-3,1]

B.(-3,1)

C.(-∞,-3]∪[1,+∞)

D.(-∞,-3)∪(1,+∞)

**5.(2015湖北文,6,5分)函数f(x)=+lg的定义域为(　　)**

A.(2,3)　　　　　B.(2,4]

C.(2,3)∪(3,4]　　　　　D.(-1,3)∪(3,6]

**6.(2014山东理,3,5分)函数f(x)=的定义域为(　　)**

A.　　　　　B.(2,+∞)

C.∪(2,+∞)　　　　　D.∪[2,+∞)

**7.(2016课标Ⅱ文,10,5分)下列函数中,其定义域和值域分别与函数y=10lg x的定义域和值域相同的是(　　)**

A.y=x　　　B.y=lg x　　　C.y=2x　　　D.y=

**8*.*(2022北京,4,4分)已知函数*f*(*x*)=,则对任意实数*x*,有**(　　)

A. *f*(-*x*)+*f*(*x*)=0　　　　B. *f*(-*x*)-*f*(*x*)=0

C. *f*(-*x*)+*f*(*x*)=1　　　　D. *f*(-*x*)-*f*(*x*)=

**9*.*(2022北京,11,5分)函数*f*(*x*)=的定义域是　　　　　　*.***

**10.(2015课标Ⅱ文,13,5分)已知函数f(x)=ax3-2x的图象过点(-1,4),则a=　　　　.**

**11.(2016江苏,5,5分)函数y=的定义域是　　　　.**

## 考点二　分段函数

**1.(2015陕西文,4,5分)设f(x)=则f(f(-2))=(　　)**

A.-1　　　B.　　　C.　　　D.

**2.(2015山东文,10,5分)设函数f(x)=若f =4,则b=(　　)**

A.1　　　B.　　　C.　　　D.

**3.(2014江西文,4,5分)已知函数f(x)=(a∈R),若f [f(-1)]=1,则a=(　　)**

A.　　　B.　　　C.1　　　D.2

**4*.*(2022浙江,14,6分)已知函数*f*(*x*)=则*f*=　　　　;若当*x*∈[*a*,*b*]时,1≤*f*(*x*)≤3,**则*b*-*a*的最大值是　　　　*.*

**5.(2014课标Ⅰ文,15,5分)设函数f(x)=则使得f(x)≤2成立的x的取值范围是　　　　.**

## 考点三 函数的单调性与最值

**1*.*(2021全国甲文,4,5分)下列函数中是增函数的为**(　　)

A. *f*(*x*)=-*x*　　　　B. *f*(*x*)=

C. *f*(*x*)=*x*2　　　　D. *f*(*x*)=

**2*.*(2021全国乙文,8,5分)下列函数中最小值为4的是**(　　)

A.*y*=*x*2+2*x*+4　　　　B.*y*=|sin *x*|+

C.*y*=2*x*+22-*x*　　　　D.*y*=ln *x*+

**3*.*(2020新高考*Ⅰ*,8,5分)若定义在R的奇函数*f*(*x*)在(-∞,0)单调递减,且*f*(2)=0,则满足*xf*(*x*-1)≥0的*x*的取值范围是**(　　)

A.[-1,1]∪[3,+∞)　　　　B.[-3,-1]∪[0,1]

C.[-1,0]∪[1,+∞)　　　　D.[-1,0]∪[1,3]

4.(2019北京文,3,5分)下列函数中,在区间(0,+∞)上单调递增的是(　　)

A.y=　　　　　B.y=2-x

C.y=lox　　　　　D.y=

5.(2016北京文,4,5分)下列函数中,在区间(-1,1)上为减函数的是(　　)

A.y=　　　　　B.y=cos x

C.y=ln(x+1)　　　　　D.y=2-x

答案　D　选项A中,y==的图象是将y=-的图象向右平移1个单位得到的,故y=在(-1,1)上为增函数,不符合题意;选项B中,y=cos x在(-1,0)上为增函数,在(0,1)上为减函数,不符合题意;选项C中,y=ln(x+1)的图象是将y=ln x的图象向左平移1个单位得到的,故y=ln(x+1)在(-1,1)上为增函数,不符合题意;选项D符合题意.

评析　本题考查了基本函数的图象和性质以及图象的变换,属中档题.

**6.(2015课标Ⅱ文,12,5分)设函数f(x)=ln(1+|x|)-,则使得f(x)>f(2x-1)成立的x的取值范围是(　　)**

A.

B.∪(1,+∞)

C.

D.∪

7.(2016浙江,7,5分)已知函数f(x)满足:f(x)≥|x|且f(x)≥2x,x∈R.(　　)

A.若f(a)≤|b|,则a≤b

B.若f(a)≤2b,则a≤b

C.若f(a)≥|b|,则a≥b

D.若f(a)≥2b,则a≥b

答案　B　依题意得f(a)≥2a,

若f(a)≤2b,则2a≤f(a)≤2b,∴2a≤2b,

又y=2x是R上的增函数,∴a≤b.故选B.

8.(2016北京文,10,5分)函数f(x)=(x≥2)的最大值为　　　　.

答案　2

解析　解法一:∵f '(x)=,∴x≥2时, f '(x)<0恒成立,

∴f(x)在[2,+∞)上单调递减,

∴f(x)在[2,+∞)上的最大值为f(2)=2.

解法二:∵f(x)===1+,

∴f(x)的图象是将y=的图象向右平移1个单位,再向上平移1个单位得到的.∵y=在[2,+∞)上单调递减,

∴f(x)在[2,+∞)上单调递减,故f(x)在[2,+∞)上的最大值为f(2)=2.

解法三:由题意可得 f(x)=1+.

∵x≥2,∴x-1≥1,∴0<≤1,

∴1<1+≤2,即1<≤2.

故f(x)在[2,+∞)上的最大值为2.

评析　本题考查函数的最值,有多种解法,属中档题.

9.(2015浙江文,12,6分)已知函数f(x)=则f(f(-2))=　　　　, f(x)的最小值是　　　　.

答案　-;2-6

解析　f(-2)=(-2)2=4,f(f(-2))=f(4)=4+-6=-.

当x≤1时, f(x)=x2≥0,

当x>1时,f(x)=x+-6≥2-6,

当且仅当x=时,等号成立,

又2-6<0,所以f(x)min=2-6.

10.(2016天津,13,5分)已知f(x)是定义在R上的偶函数,且在区间(-∞,0)上单调递增.若实数a满足f(2|a-1|)>f(-),则a的取值范围是　　　　.

答案

解析　由题意知函数f(x)在(0,+∞)上单调递减.因为f(2|a-1|)>f(-), f(-)=f(),所以f(2|a-1|)>f(),所以2|a-1|<,解之得<a<.

## 考点四　函数的奇偶性

1.(2015北京文,3,5分)下列函数中为偶函数的是(　　)

A.y=x2sin x　　　　　B.y=x2cos x

C.y=|ln x|　　　　　D.y=2-x

答案　B　A中函数为奇函数,B中函数为偶函数,C与D中函数均为非奇非偶函数,故选B.

2.(2014课标Ⅰ,理3,文5,5分)设函数f(x),g(x)的定义域都为R,且f(x)是奇函数,g(x)是偶函数,则下列结论中正确的是(　　)

A.f(x)g(x)是偶函数

B.|f(x)|g(x)是奇函数

C.f(x)|g(x)|是奇函数

D.|f(x)g(x)|是奇函数

答案　C　由题意可知 f(-x)=-f(x),g(-x)=g(x),对于选项A, f(-x)·g(-x)=-f(x)·g(x),所以f(x)g(x)是奇函数,故A项错误;对于选项B,|f(-x)|g(-x)=|-f(x)|g(x)=|f(x)|g(x),所以|f(x)|g(x)是偶函数,故B项错误;对于选项C, f(-x)|g(-x)|=-f(x)|g(x)|,所以f(x)|g(x)|是奇函数,故C项正确;对于选项D,|f(-x)g(-x)|=|-f(x)g(x)|=|f(x)g(x)|,所以|f(x)g(x)|是偶函数,故D项错误,选C.

评析　本题考查函数奇偶性的定义及其应用,考查学生的知识应用能力及逻辑推理论证能力,准确理解函数奇偶性的定义是解决本题的关键.

3.(2011课标,理2,文3,5分)下列函数中,既是偶函数又在(0,+∞)单调递增的函数是(　　)

A.y=x3　　　　　B.y=|x|+1

C.y=-x2+1　　　　　D.y=2-|x|

答案　B　y=x3是奇函数,y=-x2+1和y=2-|x|在(0,+∞)上都是减函数,故选B.

评析　本题考查函数的奇偶性和单调性的判定,属容易题.

4*.*(2021全国乙理,4,5分)设函数*f*(*x*)=,则下列函数中为奇函数的是(　　)

A.*f*(*x*-1)-1　　　　B.*f*(*x*-1)+1　　　　C.*f*(*x*+1)-1　　　　D.*f*(*x*+1)+1

答案　B　解题指导:思路一:将函数*f*(*x*)的解析式分离常数,通过图象变换可得函数图象关于(0,0)对称,此函数即为奇函数;

思路二:由函数*f*(*x*)的解析式,求出选项中的函数解析式,由函数奇偶性定义来判断*.*

解析　解法一:*f*(*x*)=-1+,其图象的对称中心为(-1,-1),将*y*=*f*(*x*)的图象沿*x*轴向右平移1个单位,再沿*y*轴向上平移1个单位可得函数*f*(*x*-1)+1的图象,关于(0,0)对称,所以函数*f*(*x*-1)+1是奇函数,故选B*.*

解法二:选项A, *f*(*x*-1)-1=-2,此函数为非奇非偶函数;选项B, *f*(*x*-1)+1=,此函数为奇函数;选项C, *f*(*x*+1)-1=,此函数为非奇非偶函数;选项D, *f*(*x*+1)+1=,此函数为非奇非偶函数,故选B*.*

5*.*(2021全国甲理,12,5分)设函数*f*(*x*)的定义域为R, *f*(*x*+1)为奇函数, *f*(*x*+2)为偶函数,当*x*∈[1,2]时, *f*(*x*)=*ax*2+*b.*若*f*(0)+*f*(3)=6,则*f*=(　　)

A.-

答案　D　解题指导:利用奇偶性得到*f*(*x*+2)=-*f*(*x*),将出现的自变量0,3,对应的函数值转化为[1,2]内自变量对应的函数值,进而得到*a*,*b*以及*f*的值*.*

解析　由题知

从而*f*(*x*+4)=-*f*(*x*+2),即*f*(*x*+2)=-*f*(*x*),

所以6=*f*(0)+*f*(3)=-*f*(2)+[-*f*(1)]=-(4*a*+*b*)-(*a*+*b*)=-5*a*-2*b*,即5*a*+2*b*=-6*.*①

又由题知*f*(*x*+1)为奇函数,*x*∈R,所以*f*(1)=0,即*a*+*b*=0*.*②

由①②得从而*f*(*x*)=-2*x*2+2,*x*∈[1,2]*.*

所以*f.*故选D*.*

一题多解　因为*f*(*x*+1)与*f*(*x*+2)分别为奇函数和偶函数,所以函数*f*(*x*)的图象关于点(1,0)和直线*x*=2对称,且*f*(*x*)为周期函数,周期*T*=4,

从而*f*(0)=-*f*(2),①

*f*(3)=*f*(1)=0,②

*f*,

由①②结合*f*(0)+*f*(3)=6,知*a*=-2,*b*=2,

所以*f.*

6*.*(多选)(2022新高考*Ⅰ*,12,5分)已知函数*f*(*x*)及其导函数*f* *'*(*x*)的定义域均为R,记*g*(*x*)=*f* *'*(*x*)*.*若*f*,*g*(2+*x*)均为偶函数,则(　　)

A. *f*(0)=0　　　　B.*g*=0

C. *f*(-1)=*f*(4)　　　　D.*g*(-1)=*g*(2)

答案　BC　解法一:若设*f*(*x*)=1,则*g*(*x*)=0,易知所设*f*(*x*)符合题意,此时*f*(0)=1,故选项A错误*.*

设*f*(*x*)=sin(π*x*),则*g*(*x*)=*f* *'*(*x*)=πcos(π*x*),

由于*f*=sinsource:si_idm764391088;FounderCESπsource:si_idm764352176;FounderCES=sin=-cos(2π*x*),

*g*(2+*x*)=πcos[π(2+*x*)]=πcos(2π+π*x*)=πcos(π*x*),

所以*f*,*g*(2+*x*)均为偶函数,则所设*f*(*x*)符合题意*.*

于是*g*(-1)=πcos(-π)=-π≠*g*(2),故选项D错误*.*

由于*f*是偶函数,所以*f* *'*是奇函数,

即*g*是奇函数,则*g*=0,注意到*g*(2+*x*)是偶函数,于是*g*

=-*g*

=*g*=0,

故选项B正确*.*

由*f*,取*x*=,则*f*(-1)=*f*(4),故选项C正确*.*

故选BC*.*

解法二:由题意知*f*⇔*f*(-*x*)=*f*(3+*x*)①,

取*x*=1,知*f*(-1)=*f*(4),C正确*.*

对①两边求导知-*f* *'*(-*x*)=*f* *'*(3+*x*)⇔*f* *'*(-*x*)=-*f* *'*(3+*x*),即*g*(-*x*)=-*g*(3+*x*)②,

取*x*=-,知*g*=0*.*

*g*(2+*x*)=*g*(2-*x*)⇔*g*(-*x*)=*g*(*x*+4)③,

由②③知*g*(*x*+4)=-*g*(*x*+3),即*g*(*x*+1)=-*g*(*x*),所以*g*(*x*+2)=-*g*(*x*+1)=*g*(*x*)*.*

从而*g*=0,B正确*.*

同解法一可判断A,D错误*.*故选BC*.*

7.(2017课标Ⅱ文,14,5分)已知函数f(x)是定义在R上的奇函数,当x∈(-∞,0)时, f(x)=2x3+x2,则f(2)=　　　　.

答案　12

解析　本题主要考查运用函数的奇偶性求函数值.

由题意可知f(2)=-f(-2),∵x∈(-∞,0)时, f(x)=2x3+x2,∴f(2)=-f(-2)=-[2×(-8)+4]=-(-12)=12.

8.(2015课标Ⅰ理,13,5分)若函数f(x)=xln(x+)为偶函数,则a=　　　　.

答案　1

解析　由已知得f(-x)=f(x),即-xln(-x)=xln(x+),则ln(x+)+ln(-x)=0,

∴ln[()2-x2]=0,得ln a=0,∴a=1.

9.(2014课标Ⅱ文,15,5分)偶函数y=f(x)的图象关于直线x=2对称, f(3)=3,则f(-1)=　　　　.

答案　3

解析　∵函数y=f(x)的图象关于直线x=2对称,

∴f(2+x)=f(2-x)对任意x恒成立,

令x=1,得f(1)=f(3)=3,

∴f(-1)=f(1)=3.

10.(2012课标文,16,5分)设函数f(x)=的最大值为M,最小值为m,则M+m=　　　　.

答案　2

解析　f(x)==1+,令g(x)=,则g(x)为奇函数,有g(x)max+g(x)min=0,故M+m=2.

## 考点五 函数的周期性

1.　(2016山东,9,5分)已知函数f(x)的定义域为R.当x<0时, f(x)=x3-1;当-1≤x≤1时, f(-x)=-f(x);当x>时, f=f.则f(6)=(　　)

A.-2　　　B.-1　　　C.0　　　D.2

答案　D　当x>时,由f=f可得f(x)=f(x+1),所以f(6)=f(1),而f(1)=-f(-1), f(-1)=(-1)3-1=-2,所以f(6)=f(1)=2,故选D.

2*.*(2021全国甲文,12,5分)设*f*(*x*)是定义域为R的奇函数,且*f*(1+*x*)=*f*(-*x*)*.*若*f*,则*f*=(　　)

A.-

答案　C　解题指导:求出函数*f*(*x*)的周期再进行转化,即可求解*.*

解析　由*f*(1+*x*)=*f*(-*x*),且*f*(*x*)是定义在R上的奇函数,可得*f*(1+*x*)=*f*(-*x*)=-*f*(*x*),所以*f*(2+*x*)=-*f*(1+*x*)=*f*(*x*),所以*f*(*x*)的周期为2,则*f*,故选C*.*

知识延伸:若函数*f*(*x*)为奇函数,且满足*f*(*a*+*x*)=*f*(-*x*),则*f*(*x*)图象的对称轴为直线*x*=,周期为2*a*;若函数*f*(*x*)为偶函数,且满足*f*(*a*+*x*)=*f*(-*x*),则*f*(*x*)图象的对称轴为直线*x*=,周期为*a.*

3*.*(2022新高考*Ⅱ*,8,5分)已知函数*f*(*x*)的定义域为R,且*f*(*x*+*y*)+*f*(*x*-*y*)=*f*(*x*)*f*(*y*), *f*(1)=1,则*f*(*k*)=(　　)

A.-3　　　　B.-2　　　　C.0　　　　D.1

答案　A　令*y*=1,得*f*(*x*+1)+*f*(*x*-1)=*f*(*x*)①,故*f*(*x*+2)+*f*(*x*)=*f*(*x*+1)②*.*由①②得*f*(*x*+2)+*f*(*x*-1)=0,故*f*(*x*+2)=-*f*(*x*-1),所以*f*(*x*+3)=-*f*(*x*),所以*f*(*x*+6)=-*f*(*x*+3)=*f*(*x*),所以函数*f*(*x*)的周期为6*.*

令*x*=1,*y*=0,得*f*(1)+*f*(1)=*f*(1)·*f*(0),故*f*(0)=2,

同理,令*x*=1,*y*=1,得*f*(2)=-1;

令*x*=2,*y*=1,得*f*(3)=-2;

令*x*=3,*y*=1,得*f*(4)=-1;令*x*=4,*y*=1,得*f*(5)=1;

令*x*=5,*y*=1,得*f*(6)=2*.*

故*f*(1)+*f*(2)+*f*(3)+*f*(4)+*f*(5)+*f*(6)=0,

所以*f*(*k*)=*f*(1)+*f*(2)+*f*(3)+*f*(4)=-3*.*故选A*.*

4*.*(2022全国乙理,12,5分)已知函数*f*(*x*),*g*(*x*)的定义域均为R,且*f*(*x*)+*g*(2-*x*)=5,*g*(*x*)-*f*(*x*-4)=7*.*若*y*=*g*(*x*)的图象关于直线*x*=2对称,*g*(2)=4,则*f*(*k*)=(　　)

A.-21　　　　B.-22　　　　C.-23　　　　D.-24

答案　D　由*y*=*g*(*x*)的图象关于直线*x*=2对称,得*g*(2+*x*)=*g*(2-*x*),故*g*(*x*)=*g*(4-*x*),由*g*(*x*)-*f*(*x*-4)=7,得*g*(2+*x*)-*f*(*x*-2)=7①,又*f*(*x*)+*g*(2-*x*)=5②,所以由②-①,得*f*(*x*)+*f*(*x*-2)=-2③,则*f*(*x*+2)+*f*(*x*)=-2④,所以由④-③,得*f*(*x*+2)=*f*(*x*-2),即*f*(*x*+4)=*f*(*x*),所以函数*f*(*x*)是以4为周期的周期函数*.*

对于④,分别令*x*=1,2,得*f*(1)+*f*(3)=-2, *f*(2)+*f*(4)=-2,则*f*(1)+*f*(2)+*f*(3)+*f*(4)=-4*.*

对于①,令*x*=-1,得*g*(1)-*f*(-3)=7,则*g*(1)-*f*(1)=7⑦,

对于②,令*x*=1,得*f*(1)+*g*(1)=5⑧,

由⑦⑧,得*f*(1)=-1*.*

对于②,令*x*=0,得*f*(0)+*g*(2)=5,

又*g*(2)=4,所以*f*(0)=1*.*

对于③,令*x*=2,得*f*(2)+*f*(0)=-2,

所以*f*(2)=-3*.*

则=5×(-4)+*f*(1)+*f*(2)=-20+(-1)+(-3)=-24*.*故选D*.*

5*.*(2021新高考*Ⅰ*,13,5分)已知函数*f*(*x*)=*x*3(*a*·2*x*-2-*x*)是偶函数,则*a*=　　　　*.*

答案　1

解题指导:利用偶函数的定义,取定义域内的特殊值即可求出*a*的值*.*

解析　∵*f*(*x*)=*x*3(*a*·2*x*-2-*x*)为偶函数,

∴*f*(1)=*f*(-1),

∴2*a*-,

∴*a*=1*.*

当*a*=1时, *f*(*x*)=*x*3(2*x*-2-*x*),定义域为R,且满足*f*(-*x*)=*f*(*x*),即*f*(*x*)为偶函数*.*

一题多解　*y*=*x*3和*y*=2*x*-2-*x*为奇函数,利用结论:奇函数×奇函数=偶函数,可快速判断出*a*=1*.*

6*.*(2022全国乙文,16,5分)若*f*(*x*)=ln+*b*是奇函数,则*a*=　　　　,*b*=　　　　*.*

答案　 -;ln 2

解析　∵*f*(*x*)是奇函数,∴*f*(*x*)的定义域关于原点对称*.*

由已知得*x*≠1,∴*x*≠-1,即当*x*=-1时,=0,

∴*a*+=0,∴*a*=-,此时*f*(*x*)=ln+*b*,

∵*f*(*x*)为奇函数且在*x*=0处有意义,

∴*f*(0)=0,即ln+*b*=0,

∴*b*=-ln=ln 2*.*

综上可知,*a*=-,*b*=ln 2*.*

7.(2016四川,14,5分)已知函数f(x)是定义在R上的周期为2的奇函数,当0<x<1时, f(x)=4x,则f + f(1)=　　　　.

答案　-2

解析　∵f(x)是定义在R上的奇函数,∴f(x)=-f(-x),又∵f(x)的周期为2,

∴f(x+2)=f(x),∴f(x+2)=-f(-x),即f(x+2)+f(-x)=0,令x=-1,得f(1)+f(1)=0,∴f(1)=0.又∵f=f=-f=-=-2,∴f+f(1)=-2.